UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Scienze della Salute Umana

PRECORSO 2020

Problemi di Matematica

Giovanni Romano

Dipartimento di
Scienze Biomediche, Sperimentali e Cliniche «Mario Serio»

Numeri, frazioni, operazioni fondamentali

Problema elementare

La base di partenza per il calcolo dell'IMU di un immobile di classe A1 si ottiene rivalutando la rendita catastale del 5% e moltiplicando il risultato ottenuto per 160.
Allo stesso risultato si può giungere in un solo passaggio, moltiplicando direttamente la rendita catastale per un opportuno coefficiente *c*. Determinare il valore di *c*.

Analisi del testo

parte essenziale: "… rivalutando (ovvero aumentando, ovvero sommando) la rendita catastale del 5% e moltiplicando … per 160 …"

Se R è la rendita catastale e B è la base di partenza per calcolo IMU:

$$B = \left(R + R \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

di nuovo Analisi del testo

" … Allo stesso risultato …" vuol dire B

…si può giungere … moltiplicando direttamente la rendita catastale (R) per un opportuno coefficiente *c …"*

Ovvero $B = c \cdot R$

Quindi …

$$\begin{cases} B = \left(R + R \cdot \dfrac{5}{100} \right) \cdot 160 \\ B = c \cdot R \end{cases} \rightarrow \quad c \cdot \cancel{R} = \left(\cancel{R} + \cancel{R} \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

da cui $c = \left(1 + \dfrac{5}{100} \right) \cdot 160 = 168$

Da notare come 168 sia «160 aumentato del 5%»…

2016

57. La media aritmetica di cinque numeri è 14. Se la media aritmetica dei primi due è 20, allora la media aritmetica degli altri tre è:

A) 12
B) 14
C) 8
D) 9
E) 10

La formula della media aritmetica semplice per n elementi è:

$$M_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Esempio

Dati cinque numeri:

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 13 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 7 \quad x_5 = 12$$

la loro media aritmetica è data da:

$$M_a = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{51}{5} = 10{,}2$$

$$14 = (a + b + c + d + e) / 5$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(a + b) / 2 = 20 \\ \rightarrow \quad a + b = 40\end{array}}$$

$$a + b + c + d + e = 70$$

$$c + d + e = 30$$

$$(c + d + e) / 3 = 10$$

57. La media aritmetica di cinque numeri è 14. Se la media aritmetica dei primi due è 20, allora la media aritmetica degli altri tre è:

A) 12
B) 14
C) 8
D) 9
E) 10

Se sul prezzo di un oggetto si pratica lo sconto del 30%, e quindi sul prezzo così ottenuto si applica un nuovo sconto del 20%, quanto vale in percentuale lo sconto (cioè la riduzione percentuale) totale sul prezzo iniziale:

Attenzione: il 20% è applicato sul valore già scontato del 30% !!!

Parto da 100 → 70 → 56, quindi in tutto l'ho scontato del….

A) quesito senza soluzione univoca e corretta

B) 44% ←

C) 50%

D) 36%

E) 66%

Io pago X • 70/100 • 80/100 = 56/100 • X

=> Sconto totale = 44 / 100 • X

RICORDA INFATTI che:

«%» $\Leftrightarrow$ «diviso 100»

Esempio: 7% = 7/100 → 7% X = «sette per cento di X» = 7X/100

Per cui ad es. il 7% di 120 = $7 \cdot 120/100$ = 840/100 = 8.40

NOTA: «per mille»

«‰» $\Leftrightarrow$ «diviso 1000»

Esempio:

8‰ = 0.8%; 8% = 80 ‰

Domanda:

è maggiore il 2% di x oppure il 22‰ di x ?

<u>Elevamento a potenza di un numero</u>

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

… ovviamente con $n=m+k$

… ma allora …

$$a^n = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}^{m \text{ volte}} \overbrace{\ldots \cdot a \cdot a \cdot a}^{k \text{ volte}}}_{n \text{ volte}}$$

quindi $a^n = a^m \cdot a^k$ e poiché abbiamo convenuto che $n=m+k$, allora

$$a^{m+k} = a^m \cdot a^k$$

Proprietà fondamentale delle potenze

Elevamento a potenza di un numero

Analogamente osserviamo che

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots}^{m \text{ volte}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{k \text{ volte}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}_{m \text{ volte}}} = a^k$$

ma $k=n-m$, per cui

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Proprietà fondamentale delle potenze

Elevamento a potenza di un numero

… domanda da test: **“La metà di 10^6 è:”**

$$10^6 = 10^{(1+5)} = 10 \cdot 10^5$$

quindi …

$$\frac{10^6}{2} = \frac{10 \cdot 10^5}{2} = 5 \cdot 10^5$$

2012

Elevamento a potenza di un numero

Interpretare un numero come una potenza può rappresentare un modo molto rapido per comprenderne la natura:

Determinare quale dei seguenti numeri non è un quadrato perfetto:

A) 800
B) 256
C) 12•27
D) 10000
E) 11•44

$800=2^3 \cdot 10^2$ … NON è un quadrato perfetto

$11 \cdot 44 = 11 \cdot 11 \cdot 2^2 = 11^2 \cdot 2^2$ … quadrato perfetto

$10000 = 10^4$ … quadrato perfetto

$12 \cdot 27 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 2^2$ … quadrato perfetto

$256 = 2^8$ … quadrato perfetto

Sia $a = 1001^2 - 999^2$. Determinare quale delle seguenti relazioni è verificata.

A) $3000 < a < 5000$
B) $a < 1000$
C) $1000 < a < 3000$
D) $5000 < a < 7000$
E) $a > 7000$

$a = 1001^2 - 999^2$ … ovvero: $a = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

da cui si desume immediatamente che, essendo:
$x= 1001$
$y= 999$

… allora

$(x+y)=2000$
$(x-y)=2$

… perciò: $a = 2000 \cdot 2 = 4000$

Qual è il più grande fra i seguenti numeri:

1) 2^{62}

2) 232

3) $2^{(2^6)}$

4) $\left(2^2\right)^6$

5) 1024

Escludo subito il numero 232, essendo più piccolo di 1024.
Osservo, inoltre, che i numeri rimanenti sono tutti potenze di 2:

$$2^{(2^6)} = 2^{64}$$

$$\left(2^2\right)^6 = 2^{12}$$

…e l'esponente più alto … vince …

$$1024 = 2^{10}$$

Data l'equazione 5 logx = log32, posso affermare che x è uguale a:

Si dice *logaritmo* in base *a* di un numero *x* l'esponente da dare ad *a* per ottenere *x* (*x* viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se $x = a^y$

segue che: $y = \log_a x$

Per esempio, $\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$.

E' tutt'altro che difficile dimostrare la relazione:

$$\log_a\left(x^k\right) = k\log_a x$$

dove *a* ed *x* sono numeri reali positivi, con a diverso da 1.

Data l' equazione 5 logx = log32, posso affermare che x è uguale a:

1) 1/2
2) 2
3) 5
4) 4/2^(-1/2)
5) Nessuna delle altre quattro risposte

Proprietà dei logaritmi

$k \log x = \log (x^k)$ $\log x^5 = \log 32$ $\Rightarrow$ $x^5 = 32$ quindi x=2

2018

Se a = ln 4, b = ln (1/16), c = ln 8 qual è il valore dell'espressione (a-c)/b ?

A) -1/2
B) ¼
C) 1
D) -1/4
E) 1/2

Si tratta di ricordarsi le proprietà dei logaritmi ed eseguire i calcoli.

$\ln 4 = \ln (2^2) = 2 \ln 2$

$\ln(1/16) = -\ln 16 = -\ln (2^4) = -4 \ln 2$

$\ln(8) = \ln (2^3) = 3 \ln 2$

$\rightarrow (a-c)/b = (2 \ln 2 - 3 \ln 2) / (-4 \ln 2) = -\ln 2 / (-4 \ln 2) = 1/4$

A Michele viene chiesto di inserire i due numeri mancanti nella sequenza:
2 – 3 - 7 - 13 - 27 - ….. - …..
Quali numeri deve inserire Michele ?

A) 55 - 107
B) 53 – 107
C) 53 – 105
D) 54 – 106
E) 55 - 105

1) provare con l'idea di una successione aritmetica oppure geometrica
(la differenza fra due valori successivi è costante ? ed il loro rapporto ?)

2) calcolare le differenze fra coppie di numeri successivi e cercare di capirne la logica: 1 → 4 → 6 → 14 → ???

3) provare con «varianti» di una successione aritmetica o geometrica:
esempio: eseguo ALTERNATIVAMENTE certe operazioni: es. sommo x poi sommo y, poi x, e cosi' via, etc. **oppure** raddoppio, poi tolgo 1, poi raddoppio, poi tolgo 1, etc.

2 - 3 - 7 - 13 - 27 - ….. - …..

in entrambi i casi, il secondo numero della coppia è QUASI il doppio dell'altro…

3 = 2 **x2 -1**; 13 = 7 **x2 -1**;

questo NON è vero nel passare da 3 a 7, però in tal caso 7 = 3 x2 **+1**…

2 - 3 - 7 - 13 - 27 - ….. - …..

2 - 3 - 7 - 13 - 27 - ….. - …..

Quindi avrei:

2 → 2x2 **-1**=3 → 3x2 **+1**=7 → 7x2 **-1** = 13 → 13x2 **+1** =
27 → 27x2 **-1** = 53 → 53x2 **+1** = 107

A Michele viene chiesto di inserire i due numeri mancanti nella sequenza:
2 – 3 - 7 - 13 - 27 - ….. - …..
Quali numeri deve inserire Michele ?

A) 55 - 107
B) 53 – 107
C) 53 – 105
D) 54 – 106
E) 55 - 105

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,…

una **progressione aritmetica** è una **successione** di **numeri** tali che la **differenza** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

una **progressione geometrica** è una **successione** di **numeri** tali che il **rapporto** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... è una progressione geometrica di ragione 2.

125, 64, 27, 8:

capisco subito che non si tratta di una progressione aritmetica …

125 – 64 = 61 (ipotesi di ragione)
… subito confutata: 64 – 27 = 37 !!!

…né di una progressione geometrica…

125 / 64 = 1.953 (ipotesi di ragione)
… subito confutata: 64 / 27 = 2.370 !!!

ne deduco che deve essere qualcosa di semplicissimo: una potenza (?)

vedo che $8 = 2^3$ … $27 = 3^3$ … non è che per caso $64 = 4^3$ *e* $125 = 5^3$ *???*

Mi trovo allora con $\boldsymbol{5}^3$, $\boldsymbol{4}^3$, $\boldsymbol{3}^3$, $\boldsymbol{2}^3$ … cosa manca? $\boldsymbol{1}^3$, ovvero ***1***

125, 64, 27, 8, 1

I cateti di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente

$\sqrt{6} - \sqrt{2}$ e $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

Quanto misura l'ipotenusa ? (quiz 2013)

A) $2\sqrt{6}$

B) 16

C) $2\sqrt{2}$

D) 4

E) $\sqrt{16 + 2\sqrt{12}}$

Si tratta di applicare il teorema di Pitagora e di lavorare con i radicali

$(\text{Ipotenusa})^2 = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 =$

$= \left(6+2-2\sqrt{6}\sqrt{2}\right) + \left(6+2+2\sqrt{6}\sqrt{2}\right) = \left(8-2\sqrt{12}\right) + \left(8+2\sqrt{12}\right) =$

$= \mathbf{16}$

ATTENZIONE: questo è il QUADRATO dell'ipotenusa!!!!

I cateti di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente

$\sqrt{6} - \sqrt{2}$ e $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

Quanto misura l'ipotenusa ? (quiz 2013)

A) $2\sqrt{6}$

B) 16

C) $2\sqrt{2}$

D) 4

E) $\sqrt{16 + 2\sqrt{12}}$

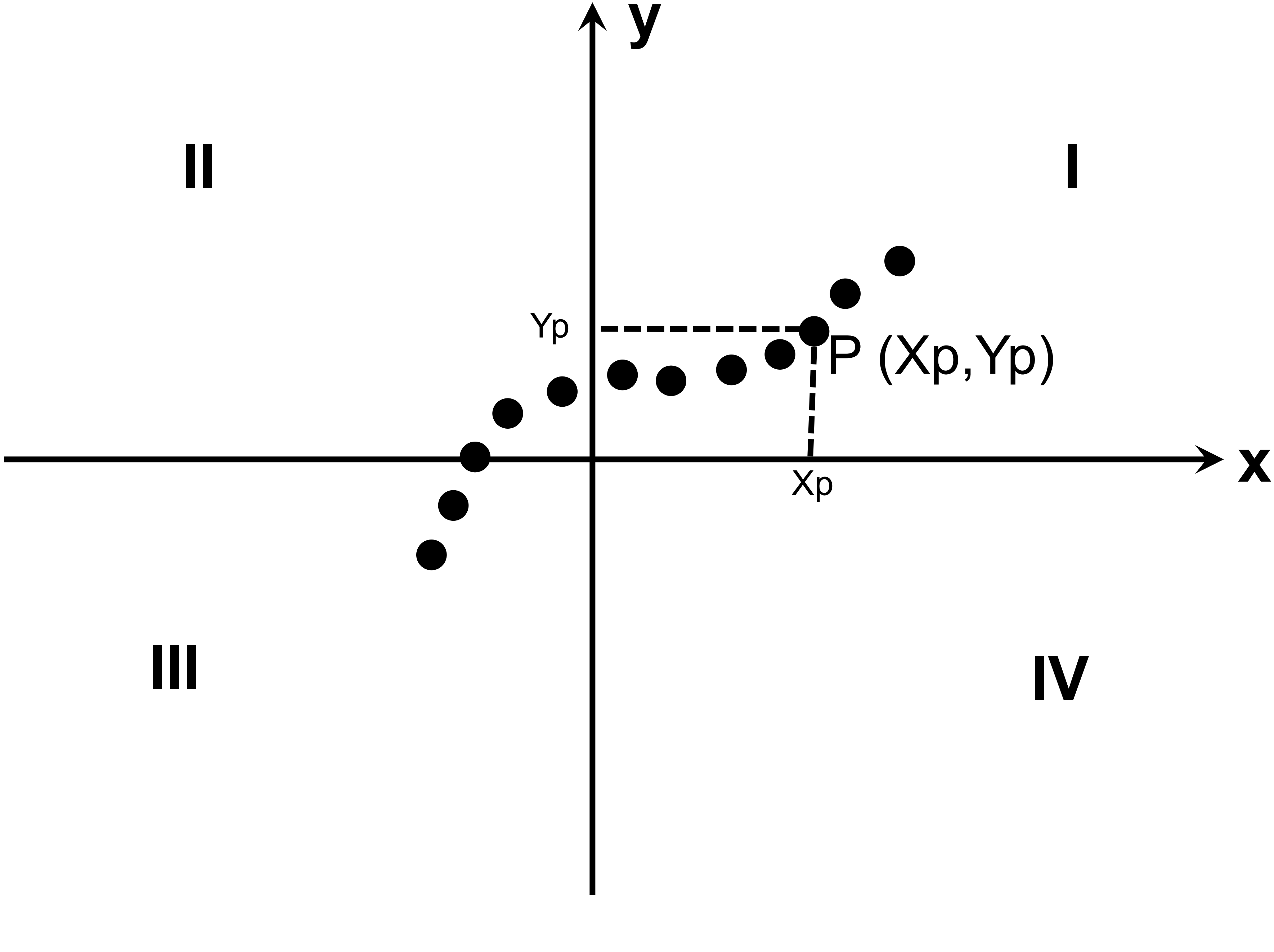
(alcune) delle proprietà fondamentali delle radici
(a numero reale positivo) – wikipedia

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.\\[2ex] \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\end{gathered}}$$

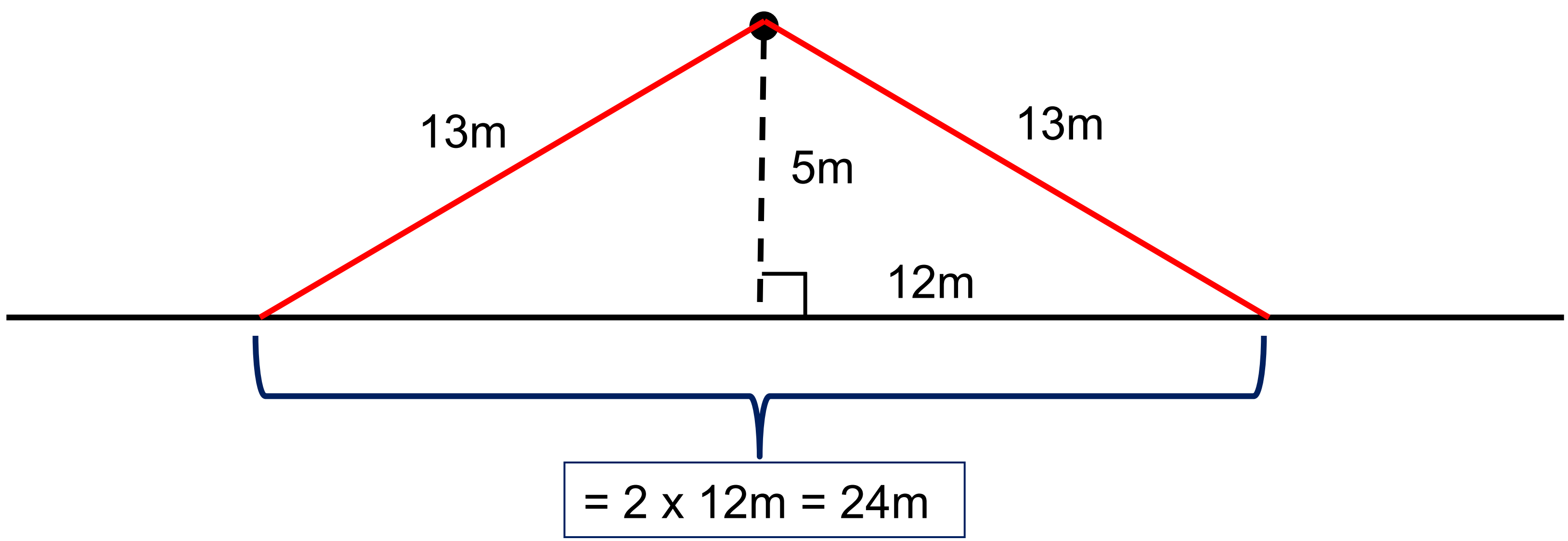
Funzioni
Piano cartesiano
Geometria


y
II
I
Yp
P (Xp,Yp)
x
Xp
III
IV

Un cane è legato, mediante una catena lunga 13 m, a un palo che dista 5 m da un sentiero rettilineo.
Determinare la lunghezza del tratto di sentiero accessibile al cane.

a) 18 m
b) 20 m
c) 24 m
d) 26 m
e) 16 m

$\sqrt{(13^2-5^2)} = \sqrt{(169-25)} = \sqrt{144} = 12$



Il rettangolo ABCD è inscritto in un quarto circonferenza. Quanto vale il segmento AC?

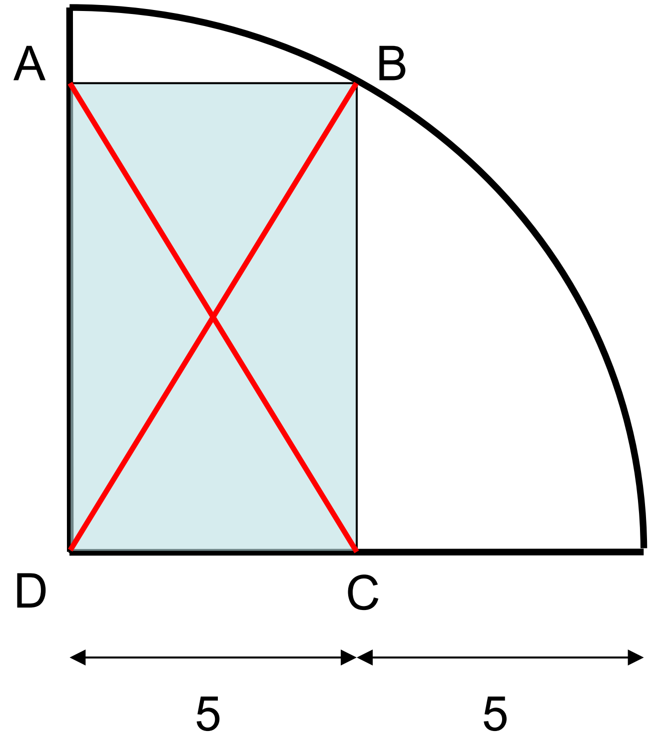
a) 5

b) 5 moltiplicato radice di due

c) 5 diviso radice di 2

d) 10

e) 7.5



Le diagonali di un rettangolo sono uguali.

2019

Cosa si può affermare riguardo al perimetro di un quadrato di area minore di $81m^2$?

A) È sempre minore di 36 m
B) È maggiore o uguale a 36 m
C) È minore o uguale a 9 m
D) È maggiore di 36 m
E) È uguale a 36 m

Se ho un quadrato di lato L, l'area vale L^2

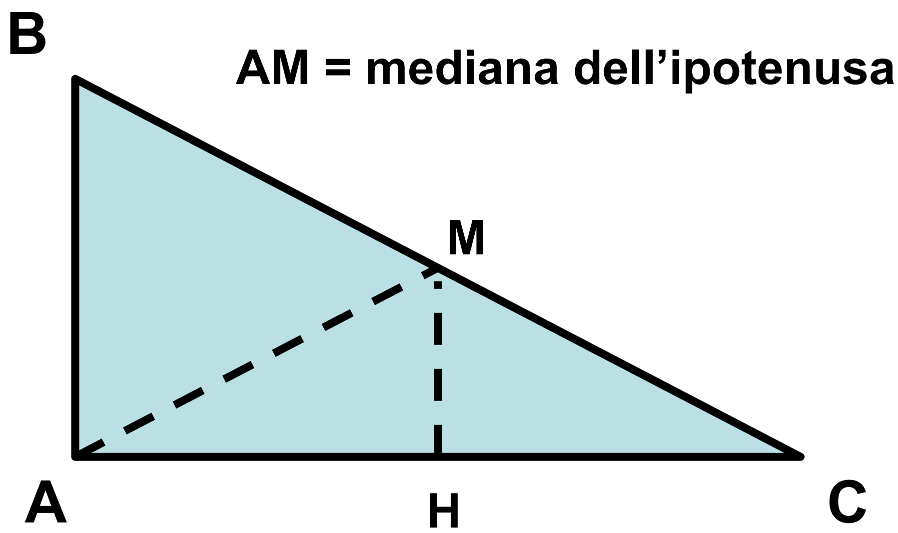
Sapendo che $L^2 < 81m^2$, si ha $L<9m$

da cui il perimetro, che vale 4L, è inferiore a 36m

2018

Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 10m e 24m.
Qual è la mediana relativa all'ipotenusa ?

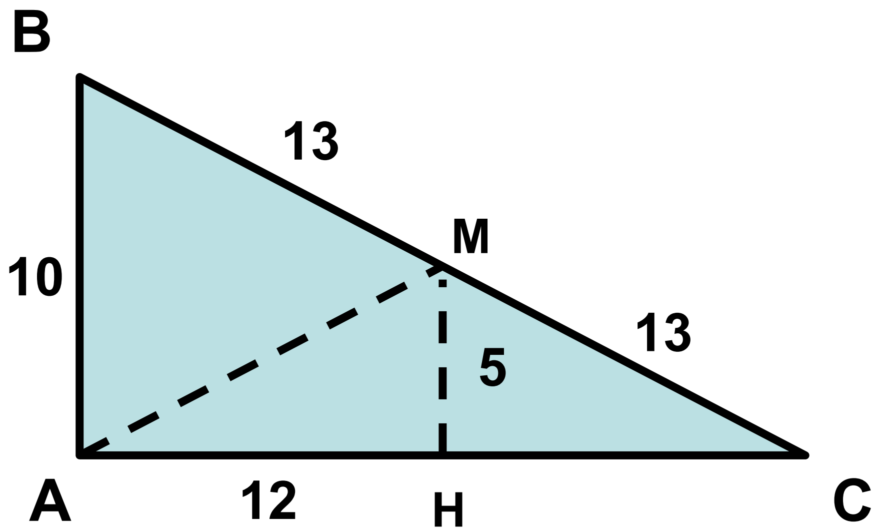
A) 12
B) 15
C) 26
D) 13
E) 16



calcoleremo AM usando il teorema di Pitagora per il triangolo AMH, sapendo che:

AH = 12m (ABC e MHC sono simili)

MH calcolato da Pitagora sul triangolo MHC



AM = mediana dell'ipotenusa

1. calcolo l'ipotenusa con il teorema di Pitagora: BC = 26 → MC=13

2. calcolo MH sapendo che ABC e MHC sono simili: MH = ½ AB

3. calcolo MA = 13

Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 10m e 24m. Qual è la mediana relativa all'ipotenusa ?

A) 12

B) 15

C) 26

D) 13

E) 16

Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

a) $2^{3/2}$

b) 4

c) 2

d) $4^{1/3}$

e) $4^{2/3}$

$V = L^3$

$V_1 / V_2 = L_1^3 / L_2^3$

$S_1 / S_2 = L_1^2 / L_2^2$

$S_1 / S_2 = (L_1 / L_2)^2$

$V_1 / V_2 = (L_1 / L_2)^3$

$$\frac{S_1 / S_2}{V_1 / V_2} = (L_1 / L_2)^{2/3}$$

2018

Quali sono i numeri reali che soddisfano l'equazione $X^4 + X^2 - 2 = 0$?

A) 2
B) 0
C) 4
D) 1
E) infiniti

si propone un'equazione di quarto grado….

…ma NON è necessario risolverla !!!

Ci si deve solo ricordare che se x_0 è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ vuol dire che $f(x_0) = 0$

$X^4 + X^2 - 2 = 0$

Basterà verificare quale dei seguenti numeri: 2, 0, 4, 1 verifica l'equazione proposta:

$x_0 = 2$: $16 + 4 – 2 = 0$ FALSO

$x_0 = 0$: $0 + 0 -2 = 0$ FALSO

$x_0 = 4$: $256 + 16 - 2 = 0$ FALSO

$x_0 = 1$: $1 + 1 – 2 = 0$ VERO

Quali sono i numeri reali che soddisfano l'equazione $X^4 + X^2 - 2 = 0$?

A) 2

B) 0

C) 4

D) 1

E) infiniti

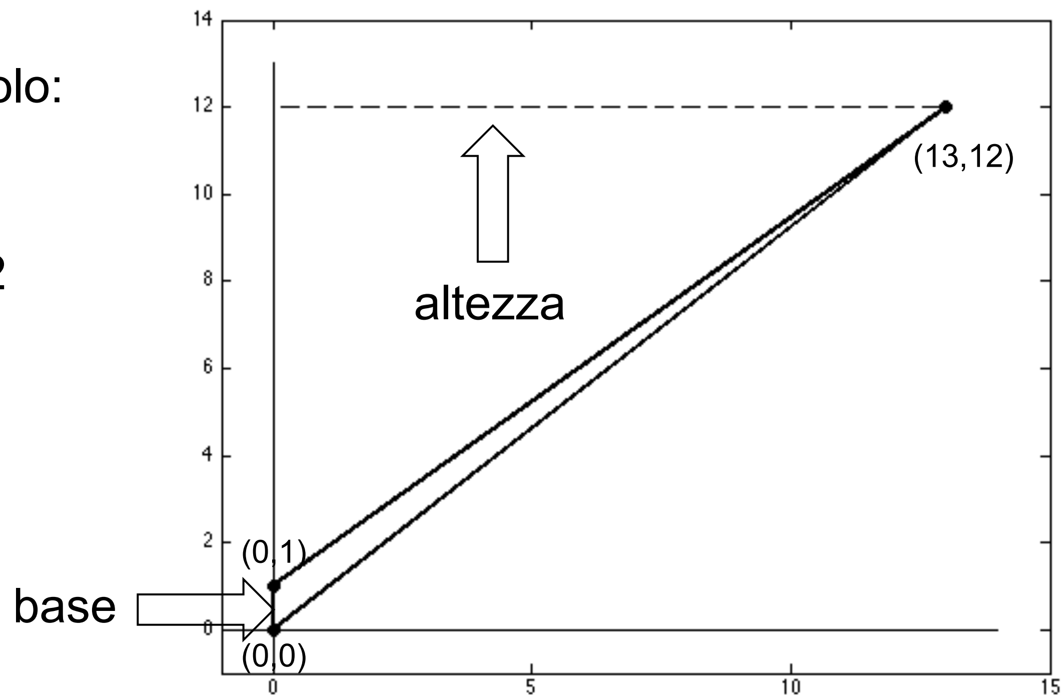
Determinare l'area del triangolo che ha come vertici i punti (0,0),(0,1),(13,12) del piano cartesiano

a) 13
b) 6
c) 78
d) 13/2
e) 12

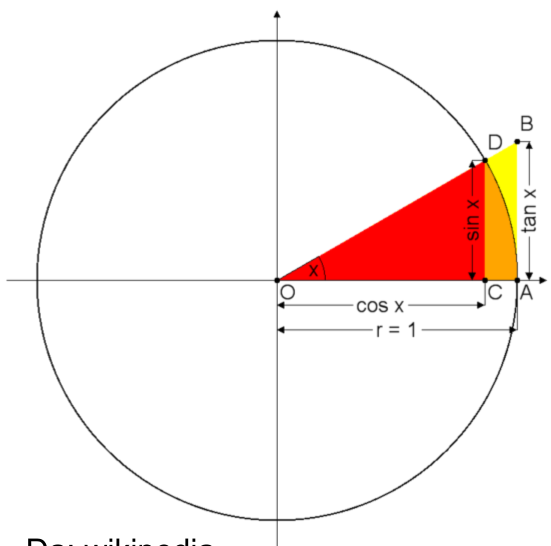
E' sufficiente disegnare il triangolo:

base = 1
altezza = 13

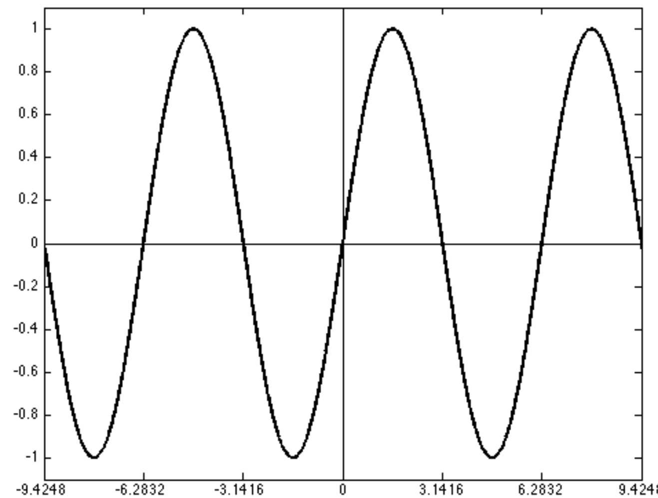
Area = 13/2



Definizione del seno e del coseno di un angolo

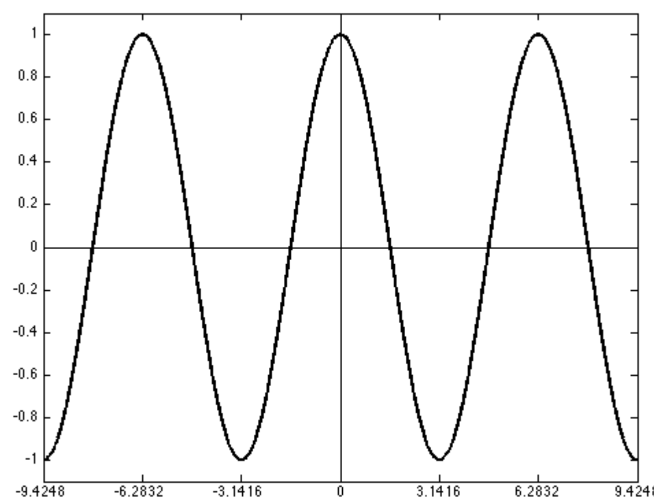


Da: wikipedia



sin(x)

dispari: sin(-x)=-sin(x)



cos(x)

pari: cos(-x)=cos(x)

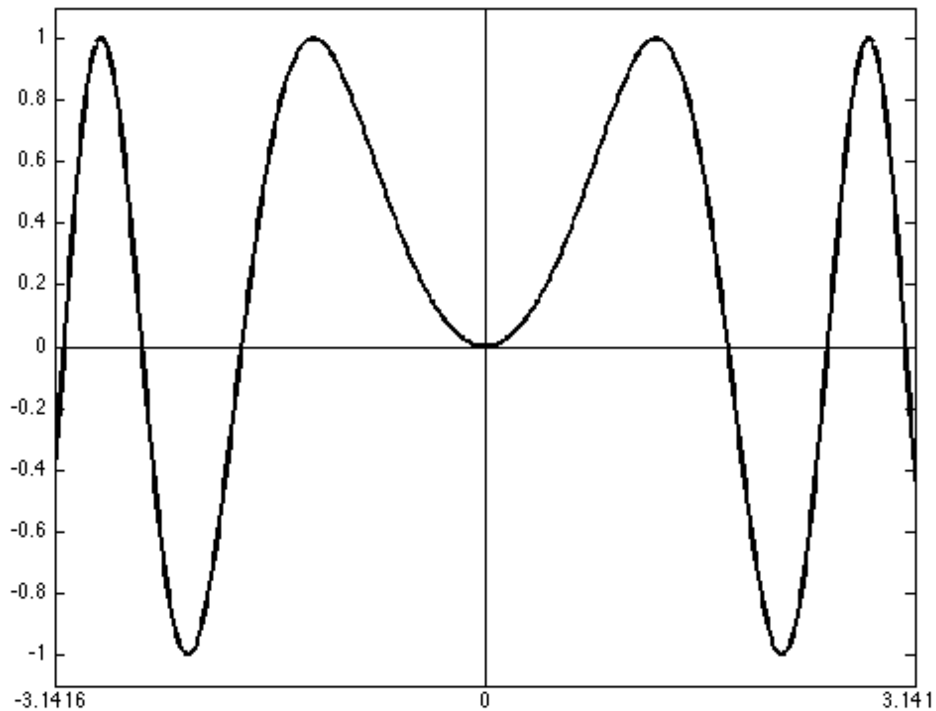
Determinare quale delle seguenti funzioni soddisfa la relazione *f(-x) = -f(x)* per ogni numero reale *x*

a) $cos^3(x)$
b) $sin^3(x)$
c) $cos(x^3)$
d) $sin^2(x)$
e) $sin(x^2)$

Vediamole …

$y=sin(x^2)$

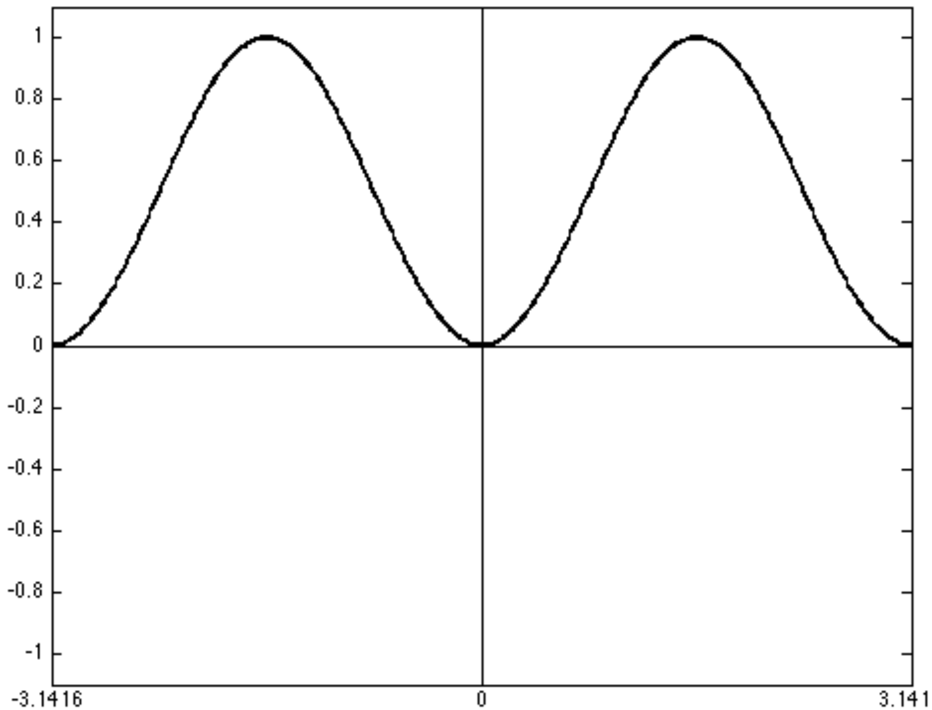
Se l'argomento è un quadrato, il valore di y non risentirà di x negativi:



… non è lei …

$y=sin^2(x)$

Se elevo al quadrato la funzione il suo valore sarà sempre positivo, annullando l'eventuale disparità per valori negativi della *x*:



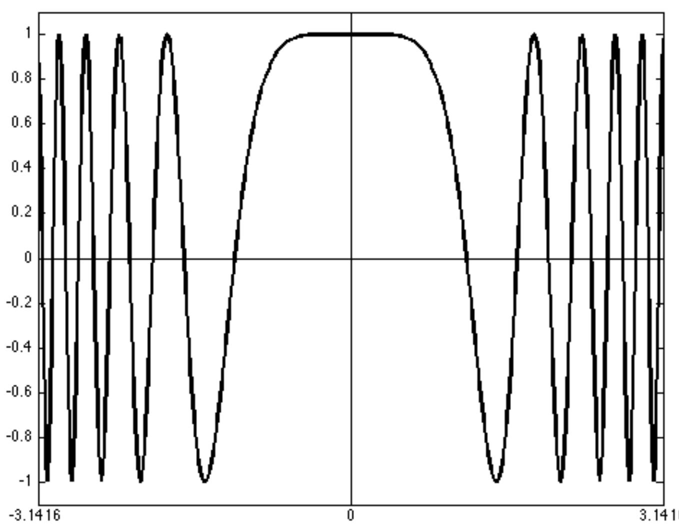
… non è lei …

$y=cos(x^3)$ $y=cos^3(x)$

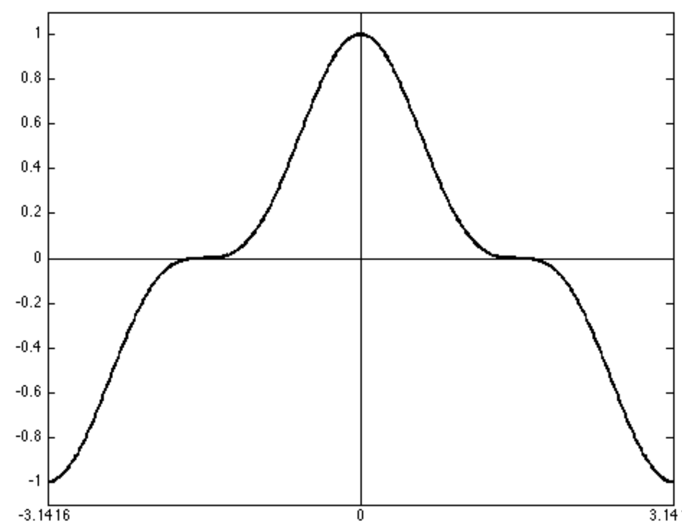
Una funzione pari, come il coseno, rimane pari in qualsiasi caso:

a) x^3 è solo un numero: che sia positivo o negativo, il coseno di un qualsiasi numero è comunque pari.

b) $cos^3 = cos^2 \cdot cos$ *:* si tratta di una funzione senz’altro pari (cos^2) moltiplicata per una funzione ancora pari *(cos).* Quindi cos^3 è pari.



$y=cos(x^3)$

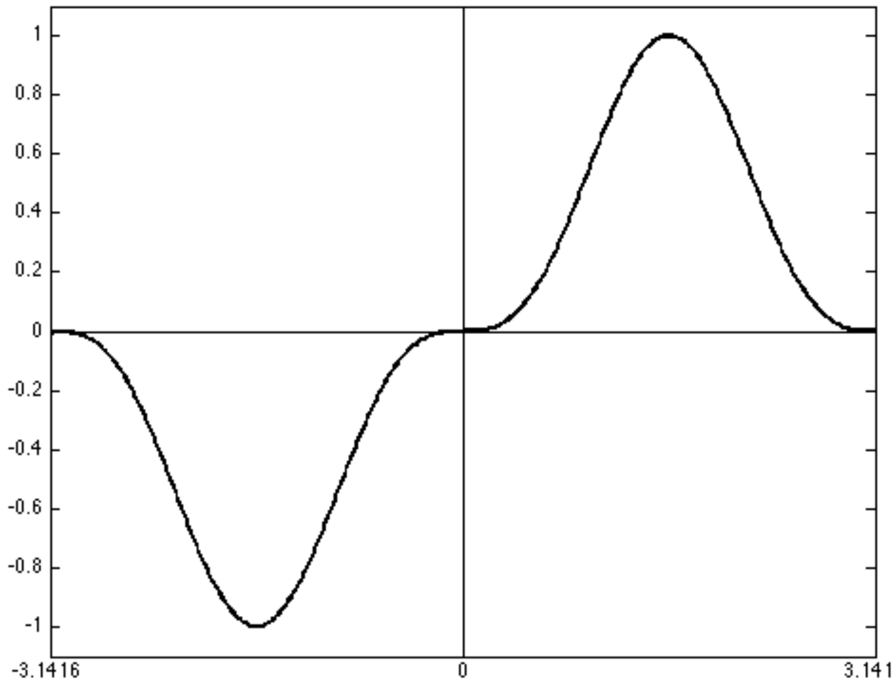


$y=cos^3(x)$

… non sono nemmeno loro …

$y = \sin^3(x)$

$\sin^3 = \sin^2 \cdot \sin$: si tratta di una funzione senz'altro pari $(\sin^2)$ moltiplicata per una funzione dispari $(\sin)$. Quindi $\sin^3$ è dispari.



$\sin^3(-x) = -\sin^3(x)$

Determinare quale delle seguenti funzioni soddisfa la relazione $f(-x) = -f(x)$ per ogni numero reale x

a) $\cos^3(x)$
b) $\sin^3(x)$
c) $\cos(x^3)$
d) $\sin^2(x)$
e) $\sin(x^2)$

2019

Quale tra le seguenti espressioni di K rende vera l'identità: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = K$?

A) $K = -\cos 2\alpha$
B) $K = \cos 4\alpha$
C) $K = \cos 2\alpha$
D) $K = \sin 4\alpha$
E) $K = -\cos 4\alpha$

Si tratta sostanzialmente di semplificare l'espressione a primo membro

A tal fine si può pensare ad espressioni notevoli da poter richiamare.
Tra queste vi è una differenza di quadrati, ma non di quarte potenze.

Però si può sempre pensare che $x^4 = (x^2)^2$, ovvero:

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$

…e proseguire:

$(\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2 = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

da qui possiamo confrontare con le soluzioni fornite, di cui nessuna comprende sia seno sia coseno

deve quindi venire in mente che si possa invocare una formula del tipo sin(a$\pm$b) oppure cos(a$\pm$b)

in particolare:

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos(2\alpha)$

Quale tra le seguenti espressioni di K rende vera l'identità:
$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = K$?

A) $K = -\cos 2\alpha$
B) $K = \cos 4\alpha$
C) $K = \cos 2\alpha$
D) $K = \sin 4\alpha$
E) $K = -\cos 4\alpha$

Semplificare la seguente espressione:
(test 2013)

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-2}{x}$$

A) $\dfrac{x-2}{x+2}$

B) $\dfrac{2x^2-2}{x(x+2)}$

C) $\dfrac{4}{x(x+2)}$

D) $\dfrac{-4}{x(x+2)}$

E) $\dfrac{4}{x+2}$

Si tratta di saper sommare le due frazioni…

Minimo comun denominatore = x · (x+2)

Avrò quindi:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x}=\frac{xx}{(x+2)x}-\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2-(x^2-4)}{(x+2)x}=\frac{4}{x(x+2)}$$

Semplificare la seguente espressione: $$\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x}$$
(quiz 2013)

A) $\frac{x-2}{x+2}$

B) $\frac{2x^2-2}{x(x+2)}$

C) $\frac{4}{x(x+2)}$

D) $\frac{-4}{x(x+2)}$

E) $\frac{4}{x+2}$

Probabilità

Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili*. (…)

Indicando con

1) Ω l'insieme di casi possibili
2) $|\Omega|=\boldsymbol{n}$ la sua cardinalità, (ovvero il **numero di casi possibili**)
3) A un evento
4) $\boldsymbol{n}_{\mathbf{A}}$ il numero dei **casi favorevoli** ad A

(ad esempio, nel lancio di un dado $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$, A = "numero pari", $n_A = 3$), la probabilità di A, indicata con $P(A)$, è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1

- la probabilità dell'evento certo è pari a 1:

  se A = "numero compreso tra 1 e 6", $n_A = 6$ e $n_A/n = 1$

- la probabilità del verificarsi di uno di due eventi incompatibili, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi;

- la probabilità del verificarsi contemporaneamente di due eventi indipendenti, è pari al prodotto delle singole probabilità

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) =1/2, e *B*= "esce il 3", con *P*(*B*) = 1/6, la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) = 1/2, la probabilità che tirando due dadi (dado 1 e dado 2) si ottengano due numeri pari è:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_{A_1}}{n} \cdot \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Nel gioco dei dadi, lanciando contemporaneamente due dadi, qual è la probabilità che si abbiano due facce con somma 7 ?

1) **1/3**
2) **1/7**
3) **1/6**
4) **2/7**
5) **5/36**

Evidentemente, in questo caso, A="due faccie con somma 7" è soddisfatto dai seguenti eventi:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ovvero, n_A=6. Naturalmente, i possibili eventi totali sono 36 (per ogni numero su un dado, può uscire uno qualsiasi dei 6 numeri sull'altro dado).
Quindi

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Test di Fisica e Matematica

53. Michele ha nel suo cassetto complessivamente 10 paia di calze, alcune a righe, altre a pois o a scacchi. Scegliendo a caso un paio di calze dal cassetto, la probabilità che trovi un paio di calze a righe è 0.4 e la probabilità che trovi un paio di calze a pois è doppia di quella che trovi un paio di calze a scacchi. Qual è la probabilità che estraendo un paio di calze dal cassetto Michele trovi quelle a scacchi?

A) 1/5
B) 2/5
C) 3/5
D) 4/5
E) 0

Il problema si riconduce a trovare x (probabilità il paio di calze estratto sia a scacchi), essendo $1 = x + 2x + 0.4$

La soluzione è quindi $x = 0.2$ ovvero 1/5

La probabilità con cui un paziente deve attendere meno di dieci minuti il proprio turno in un ambulatorio medico è 0,8. Qual è la probabilità che una paziente che si reca due volte presso l'ambulatorio medico attenda, almeno una delle due volte, meno di dieci minuti prima di essere ricevuta dal medico?

P=0,8

Se il paziente si reca 10 volte presso lo studio medico 8 volte attenderà meno di 10 minuti

"a" = attendo meno di dieci minuti P=0,8
"b" = attendo più di dieci minuti P=0,2

Recandosi nell'ambulatorio due volte si possono verificare le seguenti situazioni:

a-a; **a-b;** **Eventi indipendenti = x** **b-a;** ~~**b-b**~~.

P1 = 0,8•0,8 = 0,64 P2 = 0,8•0,2 = 0,16 P3 = 0,2•0,8 = 0,16; ~~P4 = 0,2•0,2 = 0,04~~

La probabilità che **almeno una delle due volte** l'attesa duri meno di 10 minuti

Eventi incompatibili = +

Somma delle probabilità che avvengano i casi possibili (in cui è presente almeno una volta l'evento "a").

Ptot = 0,64 + 0,16 + 0,16 = **0,96**.

Nel gioco della roulette, come si sa, i numeri vanno da 0 a 36. Qual è la probabilità che il 17 esca due volte di fila:

A) 1/(37x37)
B) 1/(37x36)
C) 1/(36x36)
D) 1/37 + 1/37
E) quesito senza soluzione univoca e corretta

La risposta D) sarebbe stata giusta se la domanda fosse stata:

"Qual è la probabilità che possa uscire (in una sola giocata) il 17 oppure il 18 ?"

Modifichiamo il quiz precedente:

Qual è la probabilità che alla roulette esca una prima volta il 17 ed una seconda un numero diverso dal 17 ?

A) 1/(37x37)

B) 1/(37x36)

C) 1/37 x 36/37

D) 1/37 + 36/37

E) quesito senza soluzione univoca e corretta

Il ragionamento è simile al precedente (ovvero: devo fare il PRODOTTO di due probabilità) MA è diversa la seconda probabilità:

Come prima la probabilità di uscita del 17 la prima volta è di 1/37

Dopo cdi che, la probabilità che la seconda volta NON esca il 17 vale:
(37-1)/37 = 36/37

2013

Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi ?

A) 1/2

B) 1/36

C) 1/3

D) 1/18

E) 1/6 ←

I casi favorevoli sono:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

I casi possibili sono 6 (per il primo dado) per 6 (secondo dado).

Quindi…

2018

Scegliendo a caso due allievi della classe prima, composta da 21 allievi, una volta su due gli studenti scelti portano gli occhiali. Qual è il numero di allievi della classe prima che portano gli occhiali?

A) 15
B) 11
C) 12
D) 9
E) 17

In questo problema non si chiede di calcolare una probabilità, ma al contrario la si fornisce.

L'idea di base è che l'equazione che servirà a trovare la soluzione proviene proprio dallo scrivere la formula che esprime tale probabilità, inserendo come incognita (x) il numero di allievi con gli occhiali:

1) $21 = x + y$

x = numero di allievi con gli occhiali
y = numero di allievi senza occhiali

2) P(occhiali n.1, occhiali n.2) = P(occhiali n.1) x P(occhiali n.2)

P(occhiali n.1) = x / 21

P(occhiali n.2) = (x-1) / 20 !!!!! NON: (x-1) / 21; NON: x / 20

quindi: $x/21 \cdot (x-1)/20 = \frac{1}{2}$

Scegliendo a caso due allievi della classe prima, composta da 21 allievi, una volta su due gli studenti scelti portano gli occhiali. Qual è il numero di allievi della classe prima che portano gli occhiali?

A) 15

B) 11

C) 12

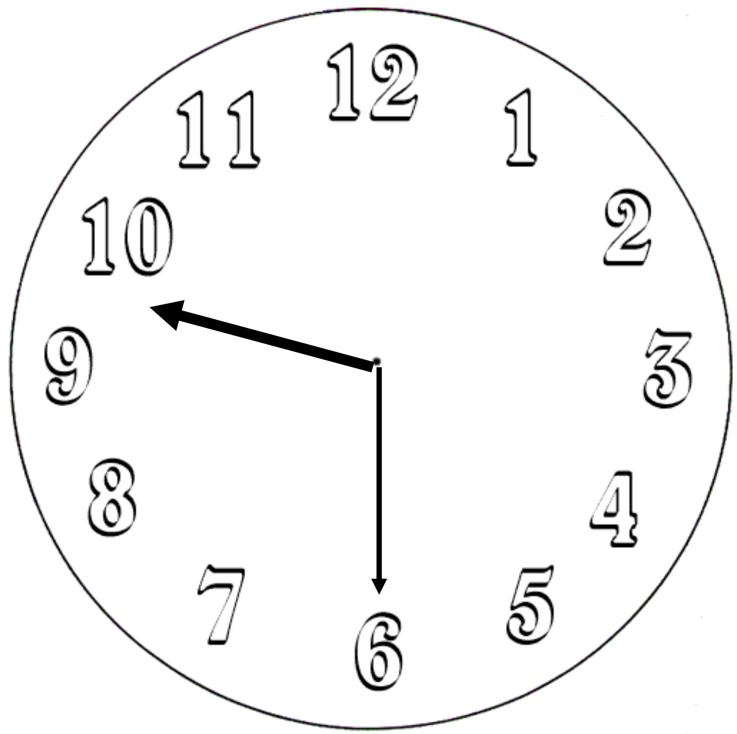
D) 9

E) 17

2016

10. **Se le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì, tra 53 ore e 45 minuti saranno:**

A) le 3.15 di sabato
B) le 23.15 di giovedì
C) le 2.15 di domenica
D) le 3.15 di venerdì
E) le 2.15 di sabato



Aritmetica modulare

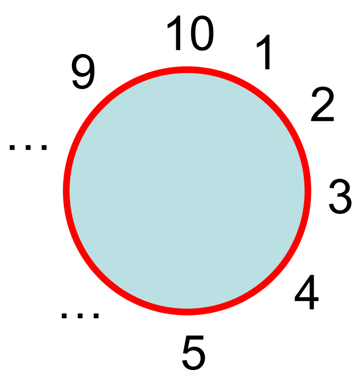
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

L'**aritmetica modulare** (a volte detta **aritmetica dell'orologio** poiché su tale principio si basa il calcolo delle ore a cicli di 12 o 24) rappresenta un importante ramo della matematica. Essa trova applicazioni nella crittografia, nella teoria dei numeri (in particolare nella ricerca dei numeri primi) ed è alla base di molte delle più comuni operazioni aritmetiche e algebriche.

A = B (mod n) $\Leftrightarrow$ A - B è multiplo di n

A, B, n: interi
$n \neq 0$

Esempio: 10 = 120 mod 10



Quindi: avevamo 53 ore e 45'.

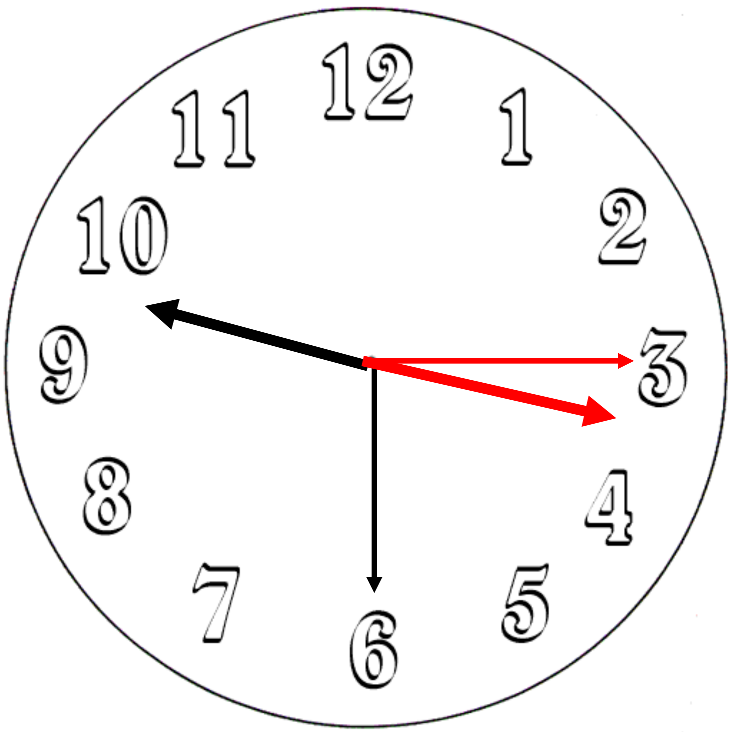
53 = 5 mod 12
→ Se invece di 53 ore ne passano 5, la posizione delle lancette NON cambia!

n = 4
Ovvero: 4 volte 12 ore
→ 2 giorni

→ 53 ore e 45' = 5 ore e 45' (mod 12)

OK. Ma n quanto vale ?

le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì,



Quindi:

53 ore e 45’ sono «come se» fossero passate 5 ore e 45’ ma siamo 2 giorni avanti

→ Sono le 21 e 30 di venerdi’ + 5 ore e 45’

→ Sono le 03 e 15 di sabato!

10. Se le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì, tra 53 ore e 45 minuti saranno:

A) le 3.15 di sabato
B) le 23.15 di giovedì
C) le 2.15 di domenica
D) le 3.15 di venerdì
E) le 2.15 di sabato